

Prof. Dr. Alfred Toth

Die vollständige semiotische Spurenmatrix

1. Während eine Kategorie aus einem Paar von Objekten sowie einer Abbildung zwischen ihnen besteht

$$\text{Kat} = ((a, b), \rightarrow),$$

besteht eine Spur aus einem Objekt sowie einer Abbildung

$$\text{Spur} = (a, \rightarrow).$$

Jede Kategorie ist daher eine Spur, während das Umgekehrte nicht gilt. Eine Spur ist allgemeiner und abstrakter als eine Kategorie. So wie man die Mathematik auf dem Begriff der Kategorie aufbauen kann, könnte man sie also auf dem Begriff der Spur aufbauen.

2. Eine Spur kann in genau 4 Varianten auftreten:

$$1. a \rightarrow \quad 3. \rightarrow a$$

$$2. a \leftarrow \quad 4. \leftarrow a,$$

d.h. es gibt also voraus- und rückwärtsweisende Spuren. Die Konverse einer Spur definiert sich als

$$(a \rightarrow)^{\circ} = (a \leftarrow).$$

Das Duale einer Spur ist definiert durch

$$\times(a \rightarrow) = (\leftarrow a),$$

d.h. die Spur und ihr Duales sind also symmetrisch. Um die Transformation

$$(a \rightarrow) \rightarrow (\rightarrow a)$$

bedarf es also einer weiteren Operation, wir nennen sie Spiegelung (σ). Somit können durch Konversion, Dualisation und Spiegelung also alle 4 Grundtypen von Spuren dargestellt bzw. ineinander überführt werden.

3. Wir konstruieren nun die vollständige semiotische Spurenmatrix. Wie die vollständige kategoriale Matrix, die sie als Untermatrix enthält (Toth 2010), ist sie identitätsfrei, und zwar trotz der Konversen und Dualia sowie weiterer Symmetrien. Wir können demnach $a \rightarrow$ und $\rightarrow a$ als morphismische Spuren (Spur + morphismische Konverse) und $a \leftarrow$ sowie $\leftarrow a$ als heteromorphe Spuren (heteromorphe Spur + heteromorphe Konverse) bezeichnen:

	$\rightarrow a$	$\leftarrow a$	$a \rightarrow$	$a \leftarrow$	$\rightarrow b$	$\leftarrow b$	$b \rightarrow$	$b \leftarrow$
$\rightarrow a$	$\rightarrow a \rightarrow a$	$\rightarrow a \leftarrow a$	$\rightarrow a a \rightarrow$	$\rightarrow a a \leftarrow$	$\rightarrow a \rightarrow b$	$\rightarrow a \leftarrow b$	$\rightarrow a b \rightarrow$	$\rightarrow a b \leftarrow$
$\leftarrow a$	$\leftarrow a \rightarrow a$	$\leftarrow a \leftarrow a$	$\leftarrow a a \rightarrow$	$\leftarrow a a \leftarrow$	$\leftarrow a \rightarrow b$	$\leftarrow a \leftarrow b$	$\leftarrow a b \rightarrow$	$\leftarrow a b \leftarrow$
$a \rightarrow$	$a \rightarrow \rightarrow a$	$a \rightarrow \leftarrow a$	$a \rightarrow a \rightarrow$	$a \rightarrow a \leftarrow$	$a \rightarrow \rightarrow b$	$a \rightarrow \leftarrow b$	$a \rightarrow b \rightarrow$	$a \rightarrow b \leftarrow$
$a \leftarrow$	$a \leftarrow \rightarrow a$	$a \leftarrow \leftarrow a$	$a \leftarrow a \rightarrow$	$a \leftarrow a \leftarrow$	$a \leftarrow \rightarrow b$	$a \leftarrow \leftarrow b$	$a \leftarrow b \rightarrow$	$a \leftarrow b \leftarrow$
$\rightarrow b$	$\rightarrow b \rightarrow a$	$\rightarrow b \leftarrow a$	$\rightarrow b a \rightarrow$	$\rightarrow b a \leftarrow$	$\rightarrow b \rightarrow b$	$\rightarrow b \leftarrow b$	$\rightarrow b b \rightarrow$	$\rightarrow b b \leftarrow$
$\leftarrow b$	$\leftarrow b \rightarrow a$	$\leftarrow b \leftarrow a$	$\leftarrow b a \rightarrow$	$\leftarrow b a \leftarrow$	$\leftarrow b \rightarrow b$	$\leftarrow b \leftarrow b$	$\leftarrow b b \rightarrow$	$\leftarrow b b \leftarrow$
$b \rightarrow$	$b \rightarrow \rightarrow a$	$b \rightarrow \leftarrow a$	$b \rightarrow a \rightarrow$	$b \rightarrow a \leftarrow$	$b \rightarrow \rightarrow b$	$b \rightarrow \leftarrow b$	$b \rightarrow b \rightarrow$	$b \rightarrow b \leftarrow$
$b \leftarrow$	$b \leftarrow \rightarrow a$	$b \leftarrow \leftarrow a$	$b \leftarrow a \rightarrow$	$b \leftarrow a \leftarrow$	$b \leftarrow \rightarrow b$	$b \leftarrow \leftarrow b$	$b \leftarrow b \rightarrow$	$b \leftarrow b \leftarrow$

Diese Matrix ist also das Fundament des noch zu konstruierenden spurentheoretischen semiotischen Universums.

An n-Spuren sind innerhalb der Semiotik zunächst die Bi-Spuren zu behandeln, welche die morphismischen Übergänge zwischen den 64 Paaren von Morphismen

festlegen. An Multi-Spuren wird man solche bezeichnen, bei denen mehr als 1 Paar von Morphismen im Input der als Automat aufgefassten semiotischen n-Spur vorhanden ist.

Spuren werden entsprechend den Kategorien komponiert, z.B.

$$(b \leftarrow \leftarrow a) \circ (b \leftarrow b \rightarrow) = b \leftarrow b \leftarrow \leftarrow a,$$

wobei hier vorausgesetzt wurde, dass \leftarrow eine höhere „Valenz“ besitzt als \rightarrow , denn dann lautete das obige Kompositum $(b \leftarrow \leftarrow a) \circ (b \leftarrow b \rightarrow) = b \leftarrow b \leftarrow a$.

Bibliografie

Toth, Alfred Die kategoriale Matrix als Untermatrix der semiotischen Matrix:
Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2010